

DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN, INNOVACIÓN Y DESARROLLO
SUBDIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS

DOCUMENTO TÉCNICO

METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE LAS VOLATILIDADES PARA EL REPORTE
OFICIAL DE RIESGOS DE MERCADO (MATRICES DE VOLATILIDAD)¹

Resumen: Este documento divulga la metodología de cálculo de las volatilidades por factor de riesgo y sus correlaciones, para cuantificar la exposición al riesgo de mercado y la exposición crediticia de operaciones con instrumentos financieros derivados y productos estructurados, en cumplimiento de lo establecido en el anexo 2 del capítulo XXI y en el anexo 3 del capítulo XVIII de la Circular Básica Contable y Financiera (CBCF) de la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC), respectivamente.

La elección del mejor modelo para los factores de riesgo del Anexo 2, se realiza a partir de la comparación de distintas variables de ajuste de pronóstico para dos metodologías multivariadas: EWMA y DCC-GARCH; para los factores del Anexo 3, se evaluaron tres metodologías: modelos univariados EWMA, la familia de modelos GARCH y Volatilidad Estocástica. A nivel multivariado el modelo EWMA muestra el mejor desempeño para todas las variables incluidas en las matrices de volatilidad y para el caso univariado, los modelos EWMA y la familia GARCH reportan los mejores resultados. En ambos casos la publicación con las metodologías validadas en este documento iniciará en junio de 2021.

Palabras claves: Volatilidad, modelo EWMA, modelo GARCH

Clasificación JEL: C13, C53

¹ Elaborado por la Subdirección de Investigación y Análisis, adscrita a la Dirección de Investigación, Innovación y Desarrollo de la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC).

Este documento no sustituye, ni pretende sustituir, el contenido de las instrucciones impartidas por la SFC sobre el particular. Igualmente, las conclusiones aquí presentadas no constituyen un pronunciamiento oficial de la SFC, sino que son opiniones técnicas de los autores.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

Contenido

1. Resumen Ejecutivo	3
2. Introducción	4
3. Revisión de la literatura	6
4. Descripción de los datos	8
4.1 Modelación del factor de riesgo IBR	10
5. Generalidades de las Metodologías	12
5.1 Especificaciones generales del modelo EWMA	12
5.2 Especificaciones generales del modelo GARCH	14
5.3 Especificación del modelo GJRGARCH	16
5.4 Especificación del modelo ARCH de potencia asimétrica (APARCH)	16
5.5 Especificación del modelo CSGARCH	17
5.6 Especificación del modelo FGARCH	17
5.7 Especificación del modelo EGARCH	17
5.8 Especificación del modelo GARCH multivariado con correlaciones condicionales dinámicas (DCC – GARCH)	18
5.9 Especificaciones generales del modelo de volatilidades estocásticas	18
6. Metodología de selección del modelo de Matrices de Volatilidad	20
7. Resultados	21
7.1 Resultados de los modelos multivariados - anexo 2 del capítulo XXI CBCF	21
7.2 Resultados de los modelos univariados - anexo 3 del capítulo XVIII CBCF	21
8. Metodología de la SFC para el cálculo de las Matrices de Volatilidad	23
9. Conclusiones	24
10. Anexos	25
11. Referencias	30

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

1. Resumen Ejecutivo

Este documento divulga la metodología utilizada por la SFC para calcular la matriz de varianza y covarianza de varios factores de riesgo, así como una revisión de literatura respecto de las mejores técnicas de estimación para este tipo de factores. Esta matriz es utilizada por las entidades vigiladas para calcular el valor en riesgo² de los portafolios y la exposición crediticia³ de las operaciones con instrumentos financieros derivados y productos estructurados (Circulares Externas 036 de 2018, 031 de 2019 y 010 de 2021).

Se presenta el uso de técnicas condicionales y no condicionales tanto en la modelación de volatilidades como en el cálculo de las correlaciones de los factores de riesgo. En este último caso, se exploran las herramientas de volatilidad existentes en términos multivariados. Las técnicas a las que se hace referencia son el modelo de promedios móviles ponderados con ajuste exponencial (EWMA) y tres modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH), una versión multivariada con correlación condicional dinámica (DCC-GARCH) y volatilidades estocásticas (SV). De ahora en adelante, se hace referencia a estos modelos como EWMA, GARCH, DCC-GARCH y SV, respectivamente.

Comparando la efectividad de los modelos con métricas de error de pronóstico (MAE, RMSE) y un conjunto de confianza de modelos (MCS), se concluye que, a nivel multivariado el EWMA presenta superioridad en las variables incluidas en las matrices de volatilidad frente al DCC-GARCH. Así mismo, a nivel univariado, con excepción del factor de riesgo IBR, el modelo EWMA⁴ confiere mejores pronósticos que los modelos de la familia GARCH y la SV. Lo anterior sustenta la elección de los modelos que soportarán las matrices de volatilidad publicadas a partir de junio de 2021.

² Anexo 2 del capítulo XXI de la CBCF de la Superintendencia Financiera de Colombia.

³ Anexo 3 del capítulo XVIII de la CBCF de la Superintendencia Financiera de Colombia.

⁴ Con excepción de los factores de descuento del IBR, dado que se encontró que los mejores modelos son los de la familia GARCH.

2. Introducción

1. Los episodios de volatilidad⁵ han despertado el interés por parte de los académicos, inversionistas y autoridades reguladoras del sistema financiero, por diseñar herramientas que permitan una mejor comprensión de la evolución de las variables y una administración más eficiente del riesgo.

2. En el contexto económico, las decisiones de los inversionistas en los mercados financieros están rodeadas de incertidumbre, en cuanto más alta sea ésta última, más riesgo enfrentarán los agentes. Este riesgo se asocia a la volatilidad, definida como un movimiento que describe comportamientos ascendentes y descendentes atípicos en el mercado (Hull, 2015). En estadística, la volatilidad es un fenómeno que captura las variaciones alrededor del promedio de cualquier parámetro aleatorio o variable objetivo, caracterizando la estabilidad o la inestabilidad (Engle, 2001). Una medida de volatilidad comúnmente utilizada es la desviación estándar, que mide la dispersión de los retornos alrededor de la media (Engle, 2001). En finanzas, la volatilidad se refiere al grado de variabilidad de los rendimientos de los activos financieros en torno a su valor medio, y es importante resaltar que, la media de los retornos puede ser constante o variable en el tiempo (Bessis, 2015).

3. El estudio de la volatilidad, como una herramienta de gestión del riesgo, constituye un asunto importante en la determinación de los precios de los activos financieros, el valor en riesgo, la fijación de precios de opciones y derivados y la toma de decisiones de inversión y creación de portafolios eficientes. Dado que la volatilidad de los activos financieros es una variable no observable, la literatura econométrica ha propuesto dos tipos de modelos para su estudio: los modelos de heteroscedasticidad condicional y los modelos de SV.

4. El trabajo pionero de Engle (1982) desarrolla el modelo autorregresivo de heteroscedasticidad condicional ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), en el que la varianza condicional depende del cuadrado de los rezagos de los términos aleatorios llamados innovaciones o errores. De esta forma, la varianza condicional hace referencia a la volatilidad en un instante de tiempo t condicionada a la información relevante y conocida hasta ese punto. Luego, Bollerslev (1986) generalizó ese primer modelo y propuso el GARCH (*Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*). Allí, la varianza condicional además de depender de los cuadrados de las perturbaciones pasadas está en función de las varianzas condicionales de períodos anteriores.

5. Taylor (1982) propuso una aproximación diferente a la estimación de la volatilidad, utilizando la teoría Bayesiana desde un punto de vista probabilístico. Definió una distribución para el proceso de retornos financieros y modeló la log-volatilidad de ese proceso como un autorregresivo de orden uno. Esta aproximación fue aceptada por otros académicos (Jacquier, Polson & Rossi 1994; Ghysels, Harvey & Renault 1996; Kim, Shephard & Chib 1998).

6. La importancia de la volatilidad en la valoración de derivados es que permite construir índices bursátiles, sirviendo para medir los niveles de incertidumbre entre los

⁵ Algunos de los eventos más destacados han sido el colapso del mercado accionario de Wall Street en octubre de 1987, la crisis hipotecaria en el 2008, la crisis sanitaria y económica del Covid-19 en el primer semestre de 2020 y las crisis de los mercados emergentes y de América Latina (México, 1994-1995; Sudeste Asiático, 1997-1999; Rusia, 1998; Brasil, 1998-1999 y Argentina, 2001).

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

actores de los mercados financieros. De hecho, con el Acuerdo de Basilea de 1996⁶, el pronóstico de volatilidad se convirtió oficialmente en una tarea obligatoria para las instituciones financieras.

7. Para el Comité de Basilea los requerimientos de capital pueden determinarse por modelos de valor en riesgo (VaR), siendo éstos una medida de la mayor pérdida esperada en una cartera de instrumentos como consecuencia de movimientos del mercado durante un horizonte temporal dado y un nivel de confianza predefinido (Basilea, 2010). Sin embargo, en 2016 éste fue sustituido por el modelo *expected shortfall*, al corregir las deficiencias del VaR en cuanto captura el riesgo de pérdidas extremas (Basilea, 2016). Cabe señalar que Basilea no hace ninguna recomendación explícita respecto a la forma de cálculo de la volatilidad para la estimación del requerimiento de capital.

8. El riesgo de mercado se define como la posibilidad de sufrir pérdidas en posiciones dentro y fuera de balance a raíz de oscilaciones en los precios de mercado (Basilea 2005). Una parte importante del sistema de medición de riesgos consiste en especificar un conjunto adecuado de factores de riesgo de mercado, es decir, las tasas y precios que afectan al valor de las posiciones de negociación. Los factores de riesgo recogidos en el sistema de medición del riesgo de mercado deberán capturar por sí solos todos los riesgos inherentes a las posiciones dentro y fuera de balance.

9. La presencia de las entidades financieras en los mercados de capitales hace que éstas sean cada vez más sensibles a la volatilidad de los precios de los instrumentos financieros que poseen en sus portafolios de inversión, elevando el riesgo de mercado. Su medición opera como instrumento de control y auditoría que suministra información sobre la tendencia del riesgo en las inversiones realizadas. Por lo tanto, para la SFC es imperativo estimar una matriz de volatilidades para el cálculo del valor en riesgo de los portafolios y la exposición de crediticia de las operaciones con instrumentos financieros derivados y productos estructurados.

10. Además de esta introducción, este documento se encuentra dividido en siete secciones: la primera hace una revisión de la literatura relacionada con la modelación de la volatilidad así como los resultados empíricos hallados; la segunda, describe los datos utilizados; la tercera, enumera las distintas metodologías de los modelos que se analizarán en el ejercicio; la cuarta, presenta la metodología de selección del modelo de matrices de volatilidad; la quinta expone los resultados del estudio; la sexta, resume la metodología aplicable al cálculo de matrices de volatilidad y en la última sección se concluye.

⁶ Enmienda del Acuerdo de Capital para Incorporar los Riesgos de Mercado, Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, (enero de 1996).

3. Revisión de la literatura

11. En los últimos años, la investigación en finanzas y econometría frente a los métodos de estimación de volatilidades se ha enfocado principalmente en la familia de modelos de heteroscedasticidad condicional formulados en base al modelo ARCH de Engle (1982). En particular, su generalización (GARCH) tiene en cuenta todos los hechos estilizados que se observan a menudo en los mercados financieros (Carroll y Kearney, 2009), incluidos:

- Los rendimientos al cuadrado están correlacionados positivamente, lo que implica que los cambios sustanciales en el precio de un activo financiero en el momento t implicará un cambio significativo en los niveles de precios en el momento $t + 1$.
- La volatilidad tiende a agruparse, formando clústers, lo que significa que un episodio de elevada (reducida) volatilidad es seguido por períodos de alta (baja) volatilidad.
- Memoria larga: la volatilidad es persistente, especialmente en el caso de datos de alta frecuencia.
- Reversión a la media: cuando se interrumpe la volatilidad, tiende a volver a su media.
- La incertidumbre en los agregados macroeconómicos implica volatilidad en los mercados financieros.

12. Hakmaoui (2019) descubrió que el modelo IGARCH es superior prediciendo la volatilidad diaria del índice bursátil marroquí al modelo EWMA y a los demás modelos de la familia GARCH (GARCH (1.1), GJR-GARCH, PGARCH y EGARCH). Pagan y Schwert (1990) compararon el modelo GARCH, EGARCH, *Markov Regime Switching* y otros tres modelos no paramétricos para predecir la volatilidad mensual de los rendimientos del mercado de valores de EE.UU. Según este estudio, el modelo GARCH, seguido de EGARCH, funcionó de manera moderada mientras que el resto tuvieron un desempeño deficiente. Franses y Van Dijk (1996) compararon tres modelos de la familia GARCH (GARCH, QGARCH y GJR-GARCH) para predecir la volatilidad semanal de varios índices bursátiles europeos y encontraron que los modelos no lineales no podían vencer al modelo GARCH estándar.

13. Engle y Patton (2001) demostraron la capacidad de los modelos GARCH para tener en cuenta los hechos estilizados observados en la volatilidad del índice bursátil Dow Jones. Miron y Tudor (2010) trabajaron con varios tipos de modelos GARCH asimétricos (EGARCH, PGARCH y TGARCH), utilizando índices bursátiles de EE. UU. y Rumania que cubrieron el período entre 2002 y 2010, demostrando que la estimación de la volatilidad resultante del modelo EGARCH es mucho más confiable que las realizadas por los otros modelos. Nilsson (2017) compara la capacidad de diferentes modelos de volatilidad para pronosticar la volatilidad y el valor del VaR del índice bursátil sueco. Compara cinco especificaciones GARCH diferentes: GARCH, IGARCH, GJR-GARCH, EGARCH y APARCH, así como EWMA. Los resultados sugieren que los mejores modelos para pronosticar la volatilidad y el VaR son APGARCH, GJRGARCH o EGARCH.

14. Chou, Wu y Liu (2009) comparan las volatilidades estimadas de los modelos MA100, EWMA, CCC, BEKK y DCC para el S&P 500 y Tbond, encontrando que el modelo DCC es superior en la estimación de matrices de covarianza para análisis dentro y fuera de la muestra. Cappiello, Engle y Sheppard (2006) emplearon el modelo DCC-GARCH para analizar el comportamiento de un grupo de acciones internacionales y los bonos de los países miembros de la Unión Europea, concluyendo que el modelo DCC es adecuado para

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

examinar la dinámica de correlación entre las diferentes clases de activos e investigar la presencia de respuestas asimétricas en las variaciones condicionales.

15. La propuesta de RiskMetrics (1996), para determinar la volatilidad reduce la inercia de las estimaciones cuando se presentan cambios estructurales al utilizar el modelo EWMA, dado que reduce el tiempo en que prevalece un cambio positivo o negativo e implica que la memoria de un hecho en particular es menor. Este modelo incorpora mejor los choques externos que los promedios móviles igualmente ponderados, lo que proporciona una medida más realista de la volatilidad actual.

16. De acuerdo con Botha (2001), este enfoque tiene dos ventajas, en primer lugar, la volatilidad reacciona con mayor rapidez en condiciones de crisis en el mercado, porque utiliza los datos más recientes a los que da mayor peso que a los datos del pasado distante; en segundo lugar, después de un choque grande, la volatilidad disminuye exponencialmente a medida que el peso de la observación del choque cae con el factor de decaimiento.

17. Kumar (2006) evalúa la capacidad de diez modelos de predicción de volatilidad estadística y econométrica diferentes en el contexto de las acciones y divisas de la India. Encuentra que tanto el EWMA como el GARCH producen los mejores pronósticos. Ding y Meade (2010) demuestran en un ejercicio con variables reales que el EWMA generó mejores pronósticos que el modelo GARCH y la SV.

18. Según el documento de Basilea (2011)⁷, a partir de JP Morgan (1996) el enfoque del EWMA se ha considerado como uno de los estándares de la industria para incorporar la volatilidad variable en el tiempo en el VaR.

19. Taylor (1982) se basa en crear una distribución para cada observación de retorno y luego modelar su log-varianza como un proceso autorregresivo. Esta nueva distribución se construye por medio de una aproximación Bayesiana usando los datos observados (distribución previa) y un conocimiento adicional de su comportamiento (sección paramétrica). Kastner (2016) aterriza este desarrollo en su trabajo aplicado en R, el cual se usó para ajustar el modelo a la naturaleza de los datos de este documento.

20. Una de las ventajas de utilizar la SV es que, si se tiene información previa del proceso de volatilidad, la aproximación Bayesiana permite definir una distribución sobre la cual se hacen muestreos aleatorios para calcular la volatilidad del momento t , haciendo más robusto el proceso de estimación frente a sus pares determinísticos.

21. Kastner (2016) probó el modelo de SV y sus pronósticos para la serie de retornos de la tasa de cambio EUR USD y los comparó con un modelo GARCH. El modelo de SV demostró ser superior en predecir las volatilidades futuras, específicamente en periodos de alta volatilidad, y en momentos normales, ambos modelos rinden de manera similar.

22. Por lo tanto, de la revisión de la literatura, se puede inferir que no hay evidencia concluyente en cuanto a la supremacía de cualquier modelo de predicción de volatilidad y que, depende de las características propias de la serie de datos y del mercado en cuestión.

⁷ "Mensajes de la literatura académica sobre medición de riesgos para el libro de negociación".

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

4. Descripción de los datos

23. De acuerdo con las instrucciones impartidas por la SFC (Anexo 2 del Capítulo XXI de la CBCF), la medición del riesgo de mercado es un modelo los factores que se reportan en siguiente tabla:

Tabla 1. Factores de riesgo utilizados para el cálculo de las matrices de volatilidad

Riesgo	Factor		Fuente de insumos	Cálculo de la variación diaria
Tasa de interés	Curva Cero Cupón Pesos	1. Componente Principal 1	Betas curva en pesos – Proveedor de precios	$PCA_m \begin{bmatrix} x_t^i - x_{t-1}^i & \cdots & x_t^j - x_{t-1}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{t+n}^i - x_{t+n-1}^i & \cdots & x_{t+n}^j - x_{t+n-1}^j \end{bmatrix}$ Donde x_t = yield del nodo en el periodo t $i \dots j$ = madurez, $m = TES, UVR, TESOROS$ n = número de observaciones
		2. Componente Principal 2		
		3. Componente Principal 3		
	Curva Cero Cupón UVR	4. Componente Principal 1	Betas curva en UVR – Proveedor de precios	
		5. Componente Principal 2		
		6. Componente Principal 3		
	Curva Cero cupón Tesoros	7. Componente Principal 1	Precios de tesoros genéricos - Bloomberg	
		8. Componente Principal 2		
		9. Componente Principal 3		
	DTF	10. Corto Plazo	Tasa asociada a los nodos de 180 (CP) y 730 (LP) de la curva utilizada por los proveedores para la valoración de instrumentos asociados a DTF	$DTF_t - DTF_{t-1}$
		11.Largo Plazo		
		12. IPC		Precios y montos negociaciones en MEC y SEN de títulos a IPC
Tasa de cambio	13. TRM		Bloomberg	$LN \left(\frac{factor_t}{factor_{t-1}} \right)$
	14. Euro / Pesos			
Precio de acciones	15. Acciones Colombia*			
	16. Acciones Global*			
Otros	17. CDS		CDS a 5 años de Colombia, Perú, México, Panamá y Chile	
	19. IBR-CP		Bloomberg – Factores de descuento de la curva swap IBR	
Participación en carteras colectivas	20. Fondos de inversión colectiva		Valor de la unidad y valor del fondo. Formato 523	

*La SFC utilizará como referente de Acciones Colombia el índice MSCI Colcap (desde mayo de 2021, antes Colcap), y para Acciones Global el MSCI World.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

24. Los componentes principales 1, 2 y 3 describen los choques de tasa paralelo, de pendiente y convexidad, respectivamente y se comportan como factores de riesgo independientes.

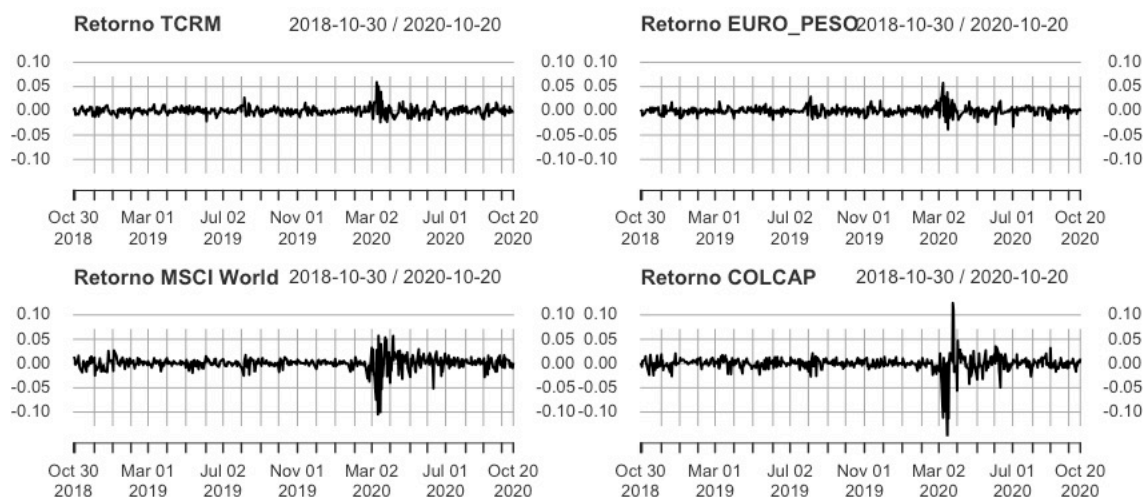
25. Para el anexo 3 del Capítulo XVIII de la Circular Básica Contable y Financiera se consideran los siguientes factores:

1. TCRM: tasa de cambio del peso colombiano frente al dólar americano.
2. EUR_PESO: tasa de cambio del peso colombiano frente al Euro.
3. MSCI World: Morgan Stanley Currency Index: índice para Acciones Global.
4. MSCI COLCAP: índice para Acciones Colombia.
5. IBR CP: factores de descuento de la curva swap IBR.

26. Para ajustar los distintos modelos de volatilidad, se utilizaron los retornos diarios⁸ de los factores desde el 30 de octubre de 2018 hasta el 20 de octubre de 2020, el cual incluye el episodio de choque ocasionado por el Covid-19 ocurrido desde marzo de 2020. Con estos datos, se ajustaron ventanas móviles de 100 observaciones para los modelos de la familia GARCH, EWMA y SV para luego determinar, por medio de pruebas de ajuste de pronóstico, cuál modelo se ajusta mejor a cada variable. A continuación, se presenta el comportamiento del retorno de cada variable.

27. El gráfico 1 muestra los retornos de las variables TCRM, EURO_PESO, MSCI World y COLCAP para el periodo estudiado. En marzo de 2020 se observa el impacto del Covid-19 en el comportamiento de las series, siendo mayor en el MSCI World y en el COLCAP. Para estas dos últimas variables, la volatilidad en los retornos perdura un par de meses más que en las tasas de cambio.

Gráfico 1. Retornos diarios de los factores TCRM, EURO_PESO, MSCI_World y COLCAP



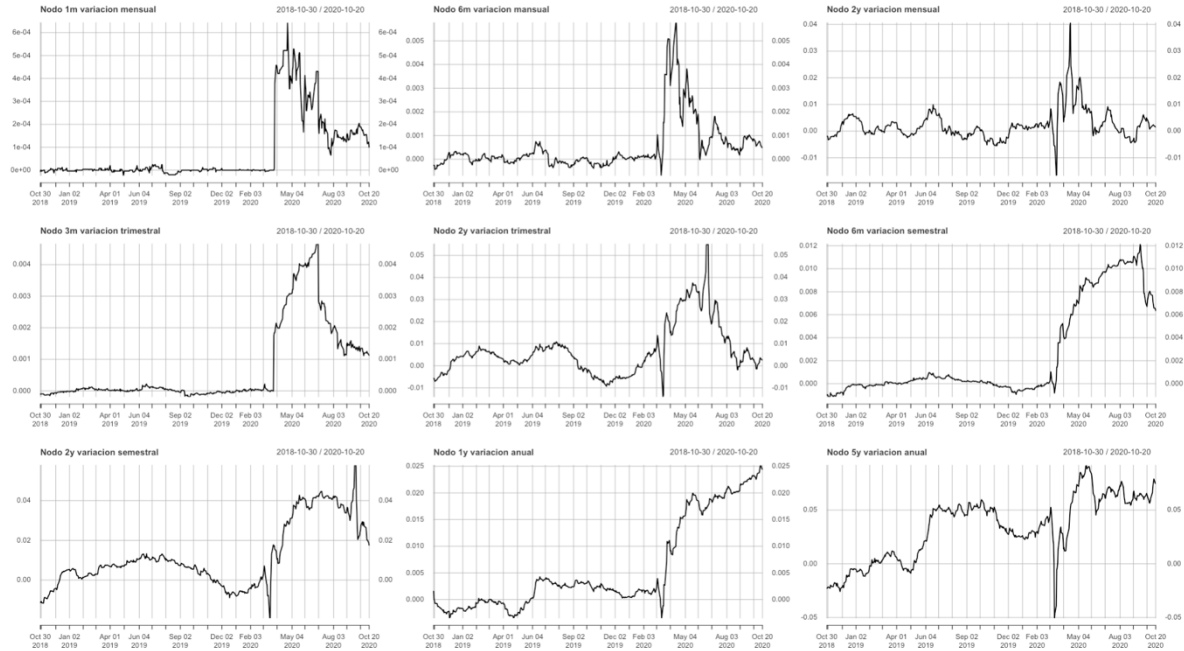
28. Por el lado del factor IBR, se considera la inclusión de nodos y ventanas del factor de descuento de la curva swap IBR representativos para que las entidades puedan calcular la exposición crediticia de los derivados ajustándolo al nodo/ventana más cercana de acuerdo con su exposición. El gráfico 2 muestra el comportamiento de los retornos de un subconjunto de la serie de factores de descuento de la IBR, que incluye las diferentes

⁸ Para IBR se utilizaron retornos o ventanas de tiempo de un mes, tres meses, seis meses y un año.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

ventanas de variación (mensual, trimestral, semestral y anual) para varios nodos de la curva.

Gráfico 2. Retornos de la curva swap IBR



4.1 Modelación del factor de riesgo IBR

29. La fórmula de Exposición Potencial Futura (EPF) establecida en el anexo 3 del capítulo XVIII de la CBCF es:

$$EPF_p = \text{Max} \{0, \text{valor absoluto} [\sum_{i=1}^N (VN_i * FC_i * J_i)] + P_p * \sum_{i=1}^N VR_i\}$$

$$FC = \text{volatilidad diaria estresada} * \sqrt{T}$$

J_i : Es el indicador de la naturaleza (largo o corto) de la i-ésima operación según tipo de subyacente. 1 cuando son de la misma naturaleza (cuando no hay neteo) y -1 de lo contrario (cuando hay neteo).

P_p : Es el indicador de la posición neta del portafolio de instrumentos financieros derivados. 0 si el neto arroja una posición ganadora (suma del valor absoluto de todas las posiciones sea positiva-valoración positiva) y 1 si el neto del portafolio arroja una posición perdedora (valoración negativa).

30. El factor de crédito (FC), entendiéndose como una volatilidad estresada al plazo correspondiente, se define como una medida de sensibilidad del valor del instrumento. Al multiplicar el factor de riesgo con el valor nominal (exposición del contrato) se obtiene el cambio monetario del valor razonable⁹. Esto asume que el único flujo expuesto es el valor

⁹ Por ejemplo, para el caso de factor de riesgo de tasa de cambio, el FC se calcula como la volatilidad estresada de la TRM o la tasa de cambio correspondiente, el cambio porcentual de la TRM capturado a través de la volatilidad se traduce en un cambio uno a uno en el valor razonable del forward/derivado en la medida que

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

neto (VN) del contrato, lo cual tiene consistencia teórica, dado que es el que más afecta el valor razonable (VR) del contrato.

31. La metodología sugerida, estima una volatilidad en variaciones logarítmicas del factor de descuento de la curva swap IBR, la cual es consistente con la fórmula de EPF. Cuando se aplicaba la variación a la tasa de interés, ésta no guarda una relación lineal con los cambios en el valor razonable de los contratos.

32. Se utilizan 6 nodos (1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, 2 años y 5 años) de la curva swap IBR para tener en cuenta la heterogeneidad en las volatilidades de cada uno de ellos. En este sentido, a partir de junio de 2021 se divulgarían 18 volatilidades para el factor IBR, de manera similar a los choques que se publican para los componentes principales del Anexo 2.

33. Las entidades, en caso de que su proveedor de precios no publique las volatilidades necesarias, deberán seleccionar el conjunto de volatilidades del nodo más cercano al vencimiento del subyacente. En el caso de Swaps, sería el plazo remanente del contrato, y en el caso de Forwards, equivaldría al plazo remanente del título subyacente. Al interior de dicho conjunto, se deberá seleccionar la volatilidad cuya ventana de variación (1 mes, 3 meses, 6 meses y 1 año) sea la más cercana al plazo T (determinado de acuerdo con las instrucciones del subnumeral 1.4.2 del Anexo 3 del capítulo XVIII de la CBCF), y re-escalarla de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\sigma_{NT}(\text{aplicable a EPF}) = \sigma_{Ni} * \sqrt{\frac{T}{i}},$$

34. Donde i corresponde al plazo, en días hábiles, de la ventana de variación seleccionada y σ_{Ni} la volatilidad publicada para el nodo n y la ventana i correspondiente.

el valor razonable cambia proporcionalmente al cambio de la tasa spot. Para el caso de la IBR, dado que cada flujo va multiplicado por el factor de descuento, los cambios porcentuales de los factores de descuento se traducen en un cambio en el valor razonable en las mismas proporciones.

5. Generalidades de las Metodologías

35. Esta sección parte estimando la volatilidad condicional de los factores de riesgo, según los modelos¹⁰ EWMA, CSGARCH, GJRGARCH, APARCH, EGARCH, FGARCH, GARCH multivariado con correlación condicional dinámica (DCC-GARCH) y SV; se selecciona el mejor modelo en función de los parámetros significativos y la estimación de máxima verosimilitud. Una vez obtenidos los estimadores de los modelos que permiten expresar mejor la volatilidad de los factores de riesgo, se procede a comparar el rendimiento del pronóstico, utilizando estadísticas como el segundo momento del error (Error Cuadrático Medio, RMSE), el Error Absoluto Medio (MAE) y el Conjunto de Confianza de Modelos (MCS)¹¹.

36. El resumen de los modelos mencionados se encuentra en la siguiente tabla:

Tabla 2: Modelos de Volatilidad

Nombre	Modelo	Tipo de modelo
EWMA	$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2, \lambda = 0.94$	Multivariado y univariado
GARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$	Multivariado (DCC)
GJRGARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma I_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$	Univariado
APGARCH	$\sigma_t^\delta = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-1} - \gamma\varepsilon_{t-1})^\delta + \beta\sigma_{t-1}^\delta$	Univariado
CSGARCH	$\sigma_t^2 = q_t + \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - q_{t-1}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - q_{t-1})$	Univariado
FGARCH	$\sigma_t^\lambda = (\omega + \zeta_j v_{mt}) + \alpha_q \sigma_{t-q}^\lambda (z_{t-q} - \eta_{2q} - \eta_{1q}(z_{t-q} - \eta_{2q}))^\delta + \beta_p \sigma_{t-p}^\lambda$	Univariado
EGARCH	$\log_e(\sigma_t^2) = (\omega + \zeta_j v_{mt}) + \alpha_j z_{t-q} + \gamma_j (z_{t-q} - E z_{t-q}) + \beta_j \log_e(\sigma_{t-p}^2)$	Univariado
Volatilidad estocástica (SV)	$h_t h_{t-1} \sim N(\mu + \phi(h_{t-1} - \mu), \sigma_n^2)$	Univariado

5.1 Especificaciones generales del modelo EWMA

37. J.P. Morgan (1996) propuso la metodología RiskMetrics que se adoptó a nivel mundial para predecir la varianza y covarianza de los rendimientos de activos financieros mediante el modelo EWMA, al que se asigna mayor peso a las observaciones recientes para ser consistente con el comportamiento de las series financieras que son de memoria corta. El modelo representa una ventaja sobre el cálculo de la volatilidad histórica al capturar las fuertes variaciones en el precio de los activos financieros; con el EWMA es posible construir mejor y con más precisión estimaciones de la volatilidad aun cuando se presentan turbulencias en los mercados financieros como ocurrió en 1994, 2008 y 2020.

¹⁰ Para seleccionar el mejor modelo en el estudio univariado también se revisó el modelo GARCH revisó los modelos IGARCH. En el modelo multivariado, se revisó adicionalmente el modelo CCC-GARCH.

¹¹ Error Absoluto Medio (MAE): $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\sigma_i^2 - \hat{\sigma}_i^2|$, Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE): $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)^2 / n}$, Conjunto de Confianza de Modelos (MCS), el cual organiza los modelos jerárquicamente optimizando la función de pérdida de cada modelo con base en la minimización de $(\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)^2$

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

38. Una estimación de volatilidad que tiene alta información es más sensible a los choques recientes. Por lo tanto, la estimación del EWMA de la volatilidad responderá a las perturbaciones de los factores del mercado más rápidamente (Sironi y Resti, 2012).

39. El enfoque EWMA se caracteriza por utilizar una muestra pequeña y está diseñado para rastrear los cambios en la volatilidad. Otra ventaja de este método es que, después de un choque, la volatilidad declina exponencialmente en la medida que el peso de esa observación va cayendo con el tiempo.

40. La ecuación que se utiliza para medir la desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} (r_t - \bar{r})^2}$$

Donde,

- σ es la raíz cuadrada de la volatilidad
- λ es el factor de decaimiento, que determina el peso de las observaciones y toma valores entre 0 y 1.
- r_t es el rendimiento de la variable en el período de tiempo t .
- \bar{r} es el promedio de las rentabilidades de la variable.

41. Cada observación que interviene en el cálculo de σ se pondera con $W_i = \lambda^{t-1}(1 - \lambda)$, donde $t = 1$ es el día más reciente; t irá aumentando, según se consideren más observaciones del pasado. Es así como se logra un ponderador con comportamiento exponencial, donde a menor valor de λ , los datos más recientes tendrán mayor importancia con relación a los antiguos. Análogamente, un valor alto de λ (es decir, cercano a 1) produce estimaciones de la volatilidad diaria que responden relativamente más lento a la nueva información proporcionada por el cambio porcentual diario.

42. El estimador de covarianza, en el modelo multivariado, sería:

$$\sigma_{1,2}^2 = (1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} (r_{1t} - \bar{r}_1)(r_{2t} - \bar{r}_2)$$

5.1.1 Ventana de tiempo

43. Los pronósticos de volatilidad y correlación basados en el modelo EWMA requieren elegir un valor apropiado del factor de decaimiento λ . Para esto, es importante determinar el número de observaciones históricas que se utilizan en los pronósticos de volatilidad y correlación. Para calcular el número de días efectivos K utilizados por los pronósticos de varianza (volatilidad) y covarianza (correlación) se utiliza la siguiente ecuación:

$$\Omega_K^\infty = (1 - \lambda) \sum_{t=K}^{\infty} \lambda^t$$

Donde Ω_K^∞ es el nivel de tolerancia, γ_L

$$K = \frac{\ln \gamma_L}{\ln \lambda}$$

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

44. Por ejemplo, al establecer un nivel de tolerancia al 1% y el factor de decaimiento de 97%, EWMA utiliza aproximadamente 151 días de datos históricos para pronosticar la volatilidad y la correlación futura. Por lo tanto, cuanto más cercano sea el factor de decaimiento a 1, menos sensible será a los datos más recientes.

5.1.2 Factor de decaimiento

45. RiskMetrics utiliza un factor de decaimiento óptimo aplicado como un promedio ponderado de factores de decaimiento óptimos individuales, donde los pesos son una medida de la precisión del pronóstico individual. Aplicando esta metodología a los retornos diarios y mensuales, encontraron que el factor de decaimiento para el conjunto de datos diarios es 0.94, y 0.97 para la información mensual. Esto se debe a que la compañía descubrió que, a través de un rango de diferentes variables de mercado, este valor proporciona pronósticos de la tasa de variación más cercana a la tasa de variación realizada (Morgan, 1996).

46. Este modelo captura la persistencia de la volatilidad y refleja un intercambio entre incrementar el número de observaciones y un muestreo más cercano a un determinado punto del tiempo. EWMA es conocido como un modelo integrado y tiene poder predictivo para horizontes de corto plazo pues no está condicionado a un nivel medio de volatilidad y como resultado se ajusta a cambios en la volatilidad incondicional rápidamente. Los modelos EWMA tienden a pronosticar volatilidades más grandes la mayoría del tiempo, pues no hay restricciones sobre la estacionariedad o convergencia a la varianza incondicional.

5.2 Especificaciones generales del modelo GARCH

47. Para la estimación de la volatilidad de un activo financiero es de interés modelar la varianza de forma condicional o con dependencia del tiempo, es decir, una volatilidad heteroscedástica. Una característica de los retornos de los activos financieros es la volatilidad cambiante a través del tiempo. Lo anterior debido a que se observan algunos fenómenos como choques causados por nueva información, influencia o persistencia de choques de volatilidad anteriores, asimétricos por cambios positivos y negativos de los retornos, o la incertidumbre propia de los precios de estos activos.

48. En 1986, Bollerslev presentó una mejora al modelo ARCH, introduciendo una relación entre la varianza condicional y realizaciones anteriores o rezagos de ésta. El modelo GARCH es un modelo autorregresivo generalizado que captura las agrupaciones de volatilidad de las rentabilidades a través de la varianza condicional. En otras palabras, esta técnica encuentra la volatilidad promedio a mediano plazo mediante una autorregresión que depende de la suma de perturbaciones rezagadas (p) y de la suma de varianzas rezagadas (q).

49. El GARCH más simple pero ampliamente reconocido es el GARCH (1,1) y es utilizado para variaciones a largo plazo, en el corto plazo el EWMA y el GARCH tienen resultados parecidos. Una de las limitaciones del modelo es que la volatilidad reacciona a choques positivos y negativos simétricamente (Hull, 2015).

50. El modelo GARCH Univariado (p,q), donde p se refiere al componente autorregresivo y q al componente residual. La perturbación definida como:

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

$$\varepsilon_t = (r_t - \bar{r}) \sim N(0,1) \text{ e independiente de } \sigma_t^2$$

Donde:

- r_t es el rendimiento de la variable en el período de tiempo t .
- \bar{r} es el promedio de las rentabilidades de la variable.
- ε_t corresponde a la distancia entre la observación r_t y su media.

Si se define,

$$\omega = \gamma V_L$$

Donde:

- γ es el peso asignado tasa de variación promedio a largo plazo, V_L ;

Entonces, el modelo GARCH (p,q) se puede escribir como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^p \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum_{q=1}^q \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

Donde:

- σ_t^2 es la varianza de la variable en el día t ;
- α es el peso asignado a la perturbación al cuadrado de ese período de tiempo ($t - p$), ε_{t-p}^2 ;
- β es el peso asignado a la varianza histórica anterior a ese período de tiempo ($t - q$), σ_{t-q}^2 .

51. Los coeficientes ω , α , β , se estiman con el método de Máxima Verosimilitud. De esta forma se encuentra la ponderación para la varianza de las observaciones recientes y para la varianza de las observaciones históricas.

52. A partir de esta formulación general, el modelo GARCH (1,1) tiene las siguientes características:

- Los parámetros $\gamma > 0$ y $\alpha + \beta < 1$.
- Se cumple la condición de estacionariedad en media, la suma de todos los parámetros es menor o igual que 1.

53. El modelo EWMA es un caso particular del GARCH (1,1) donde $\gamma = 0$, $\alpha = 1 - \lambda$ y $\beta = \lambda$.

54. Una vez estimados los parámetros ω , α y β , se calcula γ como $1 - \alpha - \beta$ y la variación promedio a largo plazo V_L se obtiene a partir de ω/γ .

55. En la práctica, las tasas de variación tienden a ser reversiones a la media. El modelo GARCH (1,1) incorpora la reversión a la media, mientras que el modelo EWMA no. Por lo tanto, GARCH (1,1) es teóricamente más atractivo que el EWMA. Sin embargo, en circunstancias donde el mejor valor de ω resulta ser negativo, el modelo GARCH (1,1) no es estable y tiene sentido estimar un EWMA.

56. La estimación de los parámetros se realiza por máxima verosimilitud a partir de datos históricos en EWMA y GARCH (1,1). Este método implica el uso de un procedimiento

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

iterativo para determinar los valores de los parámetros que maximizan la probabilidad de que ocurran los datos históricos. Una vez que se han determinado sus parámetros, se puede juzgar un modelo GARCH (1,1) según lo bien que elimine la autocorrelación de las perturbaciones.

57. Una de las debilidades de los modelos GARCH es la dificultad de capturar por completo los efectos de apalancamiento entendidos como la reacción de la volatilidad a caídas o subidas del precio de la misma magnitud, pues el modelo GARCH asume que dicha reacción es simétrica, lo cual no sucede en la realidad, pues la volatilidad condicional reacciona más fuertemente ante una caída que ante una subida del precio en la misma magnitud. No obstante, el GARCH captura el fenómeno de *Volatility Clusters*, es decir, agrupamiento de la volatilidad en períodos de alta volatilidad y períodos de baja volatilidad.

5.3 Especificación del modelo GJR GARCH

58. El modelo GJR GARCH de Glosten (1993) modela los choques positivos y negativos asimétricos de la varianza, mediante el uso de una variable indicadora (*dummy*).

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{p=1}^p (\alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \gamma_p I_{t-p} \varepsilon_{t-p}^2) + \sum_{q=1}^q \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

59. Donde γ_p representa el efecto apalancamiento. La función indicadora I toma el valor de 1 para $\varepsilon \leq 0$ y 0 de lo contrario. Debido a la presencia de la función I , la persistencia del modelo depende de la asimetría de la distribución condicional utilizada.

60. Este modelo permite capturar el hecho de que los choques negativos suelen tener más efecto sobre la varianza en el siguiente periodo, que los choques positivos (efecto apalancamiento).

5.4 Especificación del modelo ARCH de potencia asimétrica (APARCH)

61. El modelo de potencia asimétrica APARCH de Ding, Granger y Engle (1993), se define como:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{p=1}^p \alpha_p (|\varepsilon_{t-p}| - \gamma \varepsilon_{t-p})^\delta + \sum_{q=1}^q \beta_q \sigma_{t-q}^\delta$$

62. El parámetro $-1 < \gamma < 1$ captura la asimetría, mientras que el parámetro $\delta \in \mathbb{R}^+$ ayuda a capturar la dinámica de volatilidad de manera más flexible que para otras especificaciones GARCH. APARCH anida varios modelos GARCH y se reduce a GJR-GARCH cuando $\delta = 2$ y $0 < \gamma < 1$, y a un GARCH cuando $\delta = 2$ y $\gamma = 0$.

63. Este es un modelo de memoria larga que evidencia particularmente la existencia de una mayor correlación entre los retornos absolutos que entre los retornos al cuadrado y su persistencia en los rezagos largos. Esta propiedad es más fuerte cuando δ se encuentra alrededor de 1. Adicionalmente, permiten capturar el hecho de que los choques negativos suelen tener más efecto sobre la varianza en el siguiente periodo, que los choques positivos, efecto apalancamiento.

5.5 Especificación del modelo CSGARCH

64. El modelo de Lee y Engle (1999) discrimina la varianza condicional en un componente de corto y largo plazo. Donde q_t representa el componente permanente de la varianza condicional y el modelo se puede escribir como:

$$\sigma_t^2 = q_t + \sum_{p=1}^p \alpha_p (\varepsilon_{t-p}^2 - q_{t-p}) + \sum_{q=1}^q \beta_q (\sigma_{t-p}^2 - q_{t-q})$$

$$q_t = \omega + \rho q_{t-1} + \phi (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$$

donde el intercepto del modelo GARCH varía en el tiempo siguiendo el primer orden dinámico de tipo autorregresivo. La diferencia entre la varianza condicional y su tendencia, $\sigma_{t-p}^2 - q_{t-p}$ es el componente transitorio de la varianza condicional. Adicionalmente, la suma de los parámetros α_p y β_q debe ser menor que 1 y $\rho < 1$, para asegurar la no negatividad de la varianza y la estacionariedad.

5.6 Especificación del modelo FGARCH

65. La familia de modelos FGARCH propuesta por Hentschel (1995) es conocido como un modelo ómnibus que recoge la mayoría de modelos GARCH. Este cuenta con muchas similitudes con el modelo APARCH, pero es más generalizado debido a que permite que la descomposición de los residuales en la ecuación de la varianza condicional sea jalonada por diferentes potencias para z_t y σ_t , y adicionalmente permite cambios de nivel y de rotación en casos donde la curva sea impactada significativamente por nueva información, donde los cambios de nivel son la principal fuente de asimetría en choques pequeños y la rotación recoge los choques grandes. Este modelo se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_t^\lambda = \left(\omega + \sum_{j=1}^m \zeta_j v_{jt} \right) + \sum_{j=1}^q \alpha_j \sigma_{t-j}^\lambda (|z_{t-j} - \eta_{2j}| - \eta_{1j} (z_{t-j} - \eta_{2j}))^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\lambda$$

Donde,

$\sum_{j=1}^m \zeta_j v_{jt}$: son los parámetros de variables externas a incluir que puedan afectar el proceso ARMA del modelo.
 z_j : son los residuales estandarizados de la variable en el momento t

El cual es una transformación Box-Cox de la desviación condicional estándar cuya forma es determinada por λ , y el parámetro δ transforma la función de valor absoluto que está sujeta a los cambios en nivel y rotación a través de los parámetros η_{1j} y η_{2j} , respectivamente. El FGARCH se vuelve GARCH cuando $\lambda = \delta = 2$ y $\eta_{1j} = \eta_{2j} = 0$; APARCH si $\lambda = \delta$, $\eta_{2j} = 0$ y $\eta_{1j} \leq 1$; el FGARCH completo propuesto por Hentschel tiene la condición $\lambda = \delta$.

5.7 Especificación del modelo EGARCH

66. Para incluir el efecto asimétrico que tiene el cambio de los precios de un activo en su volatilidad, Nelson (1991) propone el modelo EGARCH (modelo exponencial generalizado, auto-regresivo, condicionalmente heteroscedástico). Modela el efecto de

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

asimetría al considerar una función g de las innovaciones z_t , que son variables i.i.d. de media cero, que involucra, tanto el valor de la innovación z_t como su magnitud expresada por medio de $|z_t| - E(|z_t|)$.

$$\log_e(\sigma_t^2) = \left(\omega + \sum_{j=1}^m \zeta_j v_{jt} \right) + \sum_{j=1}^q (\alpha_j z_{t-j} + \gamma_j (|z_{t-j}| - E|z_{t-j}|)) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log_e(\sigma_{t-j}^2)$$

Donde el coeficiente α_j captura el efecto de signo y γ_j el efecto de tamaño. Este modelo busca relajar las restricciones a los coeficientes que aseguran la no negatividad de la varianza.

5.8 Especificación del modelo GARCH multivariado con correlaciones condicionales dinámicas (DCC – GARCH)

67. Los modelos univariados capturan las características estilizadas de la volatilidad, tienen una limitación por no considerar los movimientos conjuntos de volatilidad de varios mercados o activos diferentes; es decir, no es posible modelar las varianzas y su correspondiente correlación en forma simultánea. Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988) amplían la metodología al contexto multivariado modelando las covarianzas cambiantes en el tiempo y simplificando las relaciones dinámicas entre los procesos de volatilidad de los rendimientos de varios activos.

68. Es importante mencionar que como se requiere el efecto de *spillovers* entre las volatilidades de cada variable incluida en la estimación de matrices de volatilidad, se procede a utilizar el GARCH multivariado, que permite compilar una matriz de varianza-covarianza con la posibilidad de estimar cada variable como un GARCH (1,1) al tiempo que calcula las correlaciones entre éstas.

69. Siguiendo a Engle y Sheppard (2001), el modelo GARCH multivariado supone que los retornos de k activos son condicionalmente multivariados con distribución normal, media cero y matriz de varianza-covarianza H_t .

$$r_t \sim N(0, H_t)$$

y

$$H_t = D_t R_t D_t'$$

Donde

- D_t es la matriz diagonal de dimensión $k \times k$ de las desviaciones estándar de los modelos GARCH univariados.
- y R_t es la matriz de correlación variable en el tiempo.

Este tipo de modelos son una extensión del GARCH univariado en dos etapas: la primera estima modelos GARCH univariados para cada serie residual, y en la segunda, se obtienen los residuales de la desviación estándar estimada durante la primera etapa.

5.9 Especificaciones generales del modelo de volatilidades estocásticas

70. El modelo de SV asume que cada observación de la muestra sigue un proceso de retornos, cuya log-varianza es a su vez un proceso autorregresivo de orden 1. Basado en la inferencia Bayesiana, esta especificación permite tener una distribución del proceso de

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

generación de retornos y una formulación estocástica para la varianza del proceso. Esto es conveniente dado que la estimación de la volatilidad en un punto del tiempo sale de un proceso probabilístico, a diferencia de una fórmula determinística como en el caso de los modelos de la familia GARCH.

71. Si se define $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)^T$ como el vector de retornos distribuido en una Normal con media cero y varianza e^{h_t} , el proceso en su forma jerárquica se puede definir como:

$$y_t | h_t \sim N(0, e^{h_t}) \quad (1)$$

$$h_t | h_{t-1} \sim N(\mu + \phi(h_{t-1} - \mu), \sigma_n^2) \quad (2)$$

$$h_0 | \mu, \phi, \sigma_n \sim N(\mu, \sigma_n^2 / (1 - \phi^2)) \quad (3)$$

Donde $N(\mu, \sigma_n^2)$ denota una distribución normal con media μ y varianza σ_n^2 . También se denota el vector de parámetros a estimar como $\theta = (\mu, \phi, \sigma_n)^T$. μ denota el nivel de log-varianza, la persistencia de esa varianza como ϕ y la volatilidad de la log-varianza como σ_n .

72. El vector de parámetros θ define la distribución previa del proceso Bayesiano. Si se tiene información previa del proceso de varianza, se pueden inferir estos parámetros, sin embargo, la aproximación más factible es hallar los valores por medio de una optimización de máxima verosimilitud. Este último se basa en encontrar cuáles son los valores de los parámetros que hacen que el proceso de varianza prediga mejor futuras volatilidades (dentro de la muestra). Una vez especificado el modelo y sus parámetros, la estimación probabilística de la varianza se hace por medio de inferencia sobre la distribución posterior de cada observación.

73. Para obtener la distribución posterior, se utiliza la metodología Cadena de Markov Monte Carlo (MCMC). Monte Carlo es una técnica de simulación de números aleatorios dentro de unos parámetros especificados. Por su parte, una cadena de Markov es una representación de cómo una variable cambia de estado en el tiempo. Una de las propiedades de la Cadena de Markov es que la probabilidad del estado futuro sólo depende de la información del estado de esa variable hoy, lo que pasó antes no tiene importancia dentro del proceso, es un proceso sin memoria.

74. La aplicación de MCMC al ejercicio de volatilidades estocásticas consiste en simular un número aleatorio con Monte Carlo, la Cadena de Markov que contiene los parámetros establecidos en el paso anterior entra a influenciar el siguiente número aleatorio generado por Monte Carlo y así hasta repetir el número de iteraciones definidas, que en el caso de este ejercicio es 10,000. Este proceso es el que genera la distribución posterior sobre la cual se hace inferencia para la estimación de la volatilidad. El proceso MCMC arroja un vector de muestreo sobre la distribución posterior para cada punto en el tiempo que se quiera estimar, a este vector se le aplica alguna técnica para obtener la estimación de la varianza, sea la media de ese vector, un cuantil o la mediana.

6. Metodología de selección del modelo de Matrices de Volatilidad

75. La elección del modelo debe resolver dos criterios competitivos, el tiempo y la frecuencia de medición a utilizar. Por un lado, los modelos incondicionales funcionan incluso cuando la observación de datos no es suficiente; mientras que los condicionales requieren datos de alta frecuencia. La base de datos del documento está compuesta por 482 observaciones diarias de la volatilidad para los 20 factores de riesgo de la matriz que publica la SFC. Se evaluaron 382 ventanas móviles para realizar los pronósticos correspondientes.

76. A partir de esta información se calcularon los parámetros de los modelos EWMA y DCC-GARCH (anexo 2 del capítulo XXI de la CBCF) con ventanas móviles de 75 y 100 observaciones¹² respectivamente; y los parámetros de los modelos EWMA, APGARCH, CSGARCH, GJRGARCH, EGARCH, FGARCH y SV (anexo 3 del capítulo XVIII de la CBCF). Con los pronósticos y la variable observada día a día se realizaron las siguientes pruebas de ajuste, por cada variable:

- Error absoluto medio (MAE): $\frac{1}{382} \sum_{i=1}^{382} |\sigma_i^2 - \hat{\sigma}_i^2|$
- Raíz del error cuadrático medio (RMSE): $\sqrt{\sum_{i=1}^{382} (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)^2 / 382}$
- Conjunto de confianza de modelos (MCS), esta prueba fue desarrollada por Hansen et al (2011) para clasificar jerárquicamente distintos modelos, en la selección de volatilidades que cuenta el paquete de R MCS de Bernardi y Catania (2014), se selecciona una función de pérdida con base en la minimización de $(\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)^2$

77. Con esto, se busca evaluar cuál de los modelos estudiados presenta un mejor desempeño en términos de poder predictivo en cada una de las pruebas. A diferencia del MAE y el RMSE, el MCS realiza 5,000 simulaciones para determinar la superioridad de un modelo frente a otro, excluyendo un modelo cuando el otro sea significativamente superior (al 95% de intervalo de confianza).

¹² Debido a restricciones computacionales del modelo DCC-GARCH, se necesitan mínimo 100 observaciones para estimar el modelo.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

7. Resultados

7.1 Resultados de los modelos multivariados - anexo 2 del capítulo XXI CBCF

78. La tabla 3 muestra la comparación de los resultados de la estimación. Estos indican que, el EWMA es superior en todas las variables bajo las pruebas de MAE y RMSE. En promedio, el modelo DCC-GARCH presenta una variación de 0.52% en el MAE y de 0.91% en RMSE, al tiempo que el EWMA reporta variaciones en MAE y RMSE de 0.36% y 0.54%, respectivamente (Ver anexo 1).

Tabla 3. Comparación de MAE, RMSE y MCS entre el DCC-GARCH y el EWMA

	MAE		RMSE		MCS (jerarquía)	
	DCC-GARCH	EWMA	DCC-GARCH	EWMA	DCC-GARCH	EWMA
CP1_PESOS	0.20%	0.14%	0.38%	0.26%	Eliminado	1
CP2_PESOS	0.10%	0.04%	0.18%	0.06%	Eliminado	1
CP3_PESOS	0.12%	0.02%	0.24%	0.04%	Eliminado	1
CP1_UVR	0.14%	0.12%	0.27%	0.21%	Eliminado	1
CP2_UVR	0.18%	0.05%	0.36%	0.09%	Eliminado	1
CP3_UVR	0.11%	0.03%	0.26%	0.06%	Eliminado	1
CP1_TESOROS	0.85%	0.71%	1.28%	0.92%	2	1
CP2_TESOROS	0.31%	0.22%	0.46%	0.31%	Eliminado	1
CP3_TESOROS	0.22%	0.12%	0.35%	0.16%	Eliminado	1
DTF_CP	0.12%	0.03%	0.25%	0.05%	Eliminado	1
DTF_LP	0.22%	0.04%	0.75%	0.06%	Eliminado	1
IPC	0.60%	0.18%	1.06%	0.23%	Eliminado	1
TCRM	0.73%	0.43%	1.02%	0.58%	Eliminado	1
EURO_PESO	0.75%	0.48%	1.10%	0.63%	Eliminado	1
MSCI_World	0.91%	0.65%	1.50%	1.02%	2	1
CARCOLEC	0.20%	0.06%	0.50%	0.10%	Eliminado	1
COLCAP	0.98%	0.91%	1.89%	1.56%	2	1
CDS	2.66%	2.35%	4.61%	3.47%	2	1

MAE, RMSE, menor variación en negrita y cursiva; MCS significativo en negrita.

79. Por el lado del MCS, se observa una superioridad del EWMA generalizado a través de todas las variables. El DCC-GARCH fue eliminado en 14 de las 18 variables. Se observó que en 4 variables la jerarquía no fue significativa (CP1_TESOROS, MSCI_World, COLCAP y CDS), lo que sustenta que según el MCS es indiferente entre EWMA y DCC-GARCH, por lo cual en el agregado se prefiere el EWMA.

80. Después de comparar el rendimiento del pronóstico utilizando el RMSE, el MAE y el MCS, se puede afirmar que el EWMA es superior al DCC-GARCH en la información utilizada para matrices de volatilidad.

7.2 Resultados de los modelos univariados - anexo 3 del capítulo XVIII CBCF

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

81. En el ejercicio para el anexo 3 se estima la volatilidad de 4 factores por separado y se obtienen los resultados que se observan en la tabla 4. (Ver anexo 2)

Tabla 4 Comparación de MAE y RMSE entre la SV y GARCH

	RMSE			MAE			MCS(jerarquía)		
	SV	GARCH	EWMA	SV	GARCH	EWMA	SV	GARCH	EWMA
TCRM	0.93%	0.89%	0.58%	0.84%	0.62%	0.43%	3	2	1
EURO_PESO	1.98%	0.94%	0.63%	0.95%	0.67%	0.48%	3	2	1
MSCI_World	6.28%	1.55%	1.02%	4.87%	0.90%	0.65%	3	2	1
COLCAP	13.26%	1.85%	1.56%	9.47%	0.96%	0.91%	3	2	1

82. Para los 4 factores en las pruebas, el modelo EWMA arroja un menor error de predicción frente a los modelos GARCH¹³ y SV, el mismo comportamiento se puede observar para la prueba de jerarquía MCS. Las pruebas de error para las series TCRM y EURO_PESO son similares los modelos, estas series se caracterizan por tener un rendimiento poco volátil y una rápida reversión a la media después del choque de volatilidad ocasionado por el Covid-19 en el periodo evaluado. Las variables MSCI_World y COLCAP fueron más volátiles en el periodo estudiado y su reversión a los niveles promedio de volatilidad previos al choque de Covid-19 fue más lento.

83. La tabla 5 compara los resultados de la estimación para el factor de riesgo IBR. En general, la familia GARCH es superior bajo las pruebas de MAE y RMSE. Para las distintas ventanas y nodos, estos modelos resultan en un error menor de predicción que el EWMA. Por lo tanto, para las variables del anexo 3 se seleccionó el modelo EWMA para TCRM, EURO, MSCI World, COLCAP y la familia GARCH para el IBR.

Tabla 5 Comparación de MAE y RMSE entre la EWMA y GARCH

	RMSE		MAE	
	EWMA	GARCH	EWMA	GARCH
FD_m1_1m	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
FD_m3_1m	0.03%	0.01%	0.01%	0.00%
FD_m6_1m	0.07%	0.03%	0.04%	0.01%
FD_y1_1m	0.18%	0.07%	0.14%	0.04%
FD_y2_1m	0.51%	0.19%	0.37%	0.10%
FD_y5_1m	1.88%	0.56%	1.28%	0.29%
FD_m3_3m	0.09%	0.02%	0.05%	0.01%
FD_m6_3m	0.19%	0.03%	0.12%	0.01%
FD_y1_3m	0.45%	0.07%	0.31%	0.04%
FD_y2_3m	1.03%	0.20%	0.80%	0.10%
FD_y5_3m	2.69%	0.55%	2.18%	0.29%
FD_m6_6m	0.42%	0.02%	0.25%	0.01%
FD_y1_6m	0.88%	0.07%	0.60%	0.04%
FD_y2_6m	1.67%	0.20%	1.28%	0.10%
FD_y5_6m	3.51%	0.55%	3.01%	0.29%
FD_y1_1y	0.94%	0.05%	0.62%	0.03%
FD_y2_1y	1.82%	0.15%	1.37%	0.08%
FD_y5_1y	3.78%	0.43%	3.31%	0.23%

*FD_nodo_ventana

¹³ Los modelos GARCH hacen referencia al resultado del mejor de los modelos GARCH estudiados.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

8. Metodología de la SFC para el cálculo de las Matrices de Volatilidad

84. Después de comparar el rendimiento del pronóstico de los modelos EWMA y DCC-GARCH, y demostrar que el EWMA es superior al DCC-GARCH en la información utilizada para matrices de volatilidad, la SFC concluye que es posible continuar estimando un modelo EWMA en días calendario (equivalentes a 75 días hábiles) de rezago con un parámetro de decaimiento (λ) de 0.94 y un nivel de confianza del 99%, para el cálculo de las volatilidades diarias de los factores del anexo 2 del capítulo XXI de la CBCF, tal y como se venía haciendo previa publicación de este documento técnico.

85. Así mismo, luego de comparar el rendimiento de los pronósticos de los modelos de la familia EWMA, GARCH y SV, y evidenciar que el modelo EWMA es superior a los modelos de la familia GARCH y SV, la SFC propone seguir calculando las volatilidades diarias de los factores del anexo 3 del capítulo XVIII estimando un EWMA en días calendario (equivalentes a 75 días hábiles) de rezago con un parámetro de decaimiento (λ) de 0.94 y un nivel de confianza del 99%. Con respecto al factor de riesgo IBR se evidenció que la familia GARCH responde mejor a los movimientos del mercado en todos los nodos y ventanas del modelo, las especificaciones respectivas son reportadas en la Tabla 6.

Tabla 6 Especificaciones GARCH factores IBR

	Ventana 1m			Ventana 3m			Ventana 6m			Ventana 1y		
	Modelo	Orden Arma	Orden GARCH	Modelo	Orden Arma	Orden GARCH	Modelo	Orden Arma	Orden GARCH	Modelo	Orden Arma	Orden GARCH
Nodo 1m	gjrGARCH	1,1	1,1									
Nodo 3m	gjrGARCH	2,1	1,2	gjrGARCH	1,1	2,1						
Nodo 6m	gjrGARCH	1,1	1,1	fGARCH	1,1	1,2	eGARCH	1,1	1,1			
Nodo 1y	gjrGARCH	1,1	1,2	fGARCH	1,1	1,2	fGARCH	1,2	1,1	csGARCH	1,1	1,1
Nodo 2y	apARCH	1,1	1,1	eGARCH	1,2	2,1	fGARCH	2,1	1,1	apARCH	1,1	1,1
Nodo 5y	apARCH	1,1	1,2	fGARCH	1,2	1,2	csGARCH	2,1	1,2	csGARCH	1,1	1,2

9. Conclusiones

86. El pronóstico de la volatilidad sigue cobrando relevancia y los estudios dirigidos a su estimación continúan multiplicándose, proponiendo nuevas técnicas y modelos. A lo largo de este documento, se ha evaluado el mejor modelo para predecir y pronosticar la volatilidad de los factores de riesgo utilizados en las matrices de volatilidad reportadas por la SFC¹⁴, comparando la efectividad de los modelos multivariados DCC-GARCH y EWMA y univariados GARCH, APARCH, CSGARCH, GJRGARCH, EGARCH, FGARCH, EWMA y SV. Los resultados obtenidos permiten afirmar que los modelos EWMA y la familia GARCH logran modelar y explicar, de manera bastante satisfactoria, la volatilidad de los factores de riesgo en comparación con el modelo multivariado DCC-GARCH y SV.

87. A partir de mayo de 2021 se utilizará como referente del factor Acciones Colombia, el índice accionario MSCI Colcap (antes Colcap). Por otro lado, la SFC modificará el insumo utilizado para la estimación del factor de riesgo IBR; particularmente, se dejará de utilizar la tasa IBR de 3 meses y en su lugar se reemplazará por los factores de descuento de la curva swap IBR para 6 nodos (1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, 2 años y 5 años) y 4 ventanas de tiempo (1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año). Este cambio será efectivo desde la publicación que se realizará en junio de 2021 con el fin de tener en cuenta la heterogeneidad en las volatilidades de los diferentes nodos.

88. Después de demostrar que el EWMA es superior al DCC-GARCH en la información utilizada, la SFC confirma que el modelo EWMA empleado hasta la fecha para el cálculo de las volatilidades diarias de los factores de las matrices de volatilidad continúa siendo adecuado. Este último utiliza 75 días hábiles, con un parámetro de decaimiento (λ) de 0.94 y un nivel de confianza del 99%,

89. En la metodología donde no se requiere el cálculo de la matriz de varianza-covarianza, la SFC estima un EWMA para los factores de riesgo TRM, Euro/peso, Acciones Global (MSCI World) y Acciones Colombia (MSCI Colcap). Con respecto al factor de riesgo IBR se evidenció que la familia GARCH responde mejor a los movimientos del mercado en todos los nodos y ventanas del modelo.

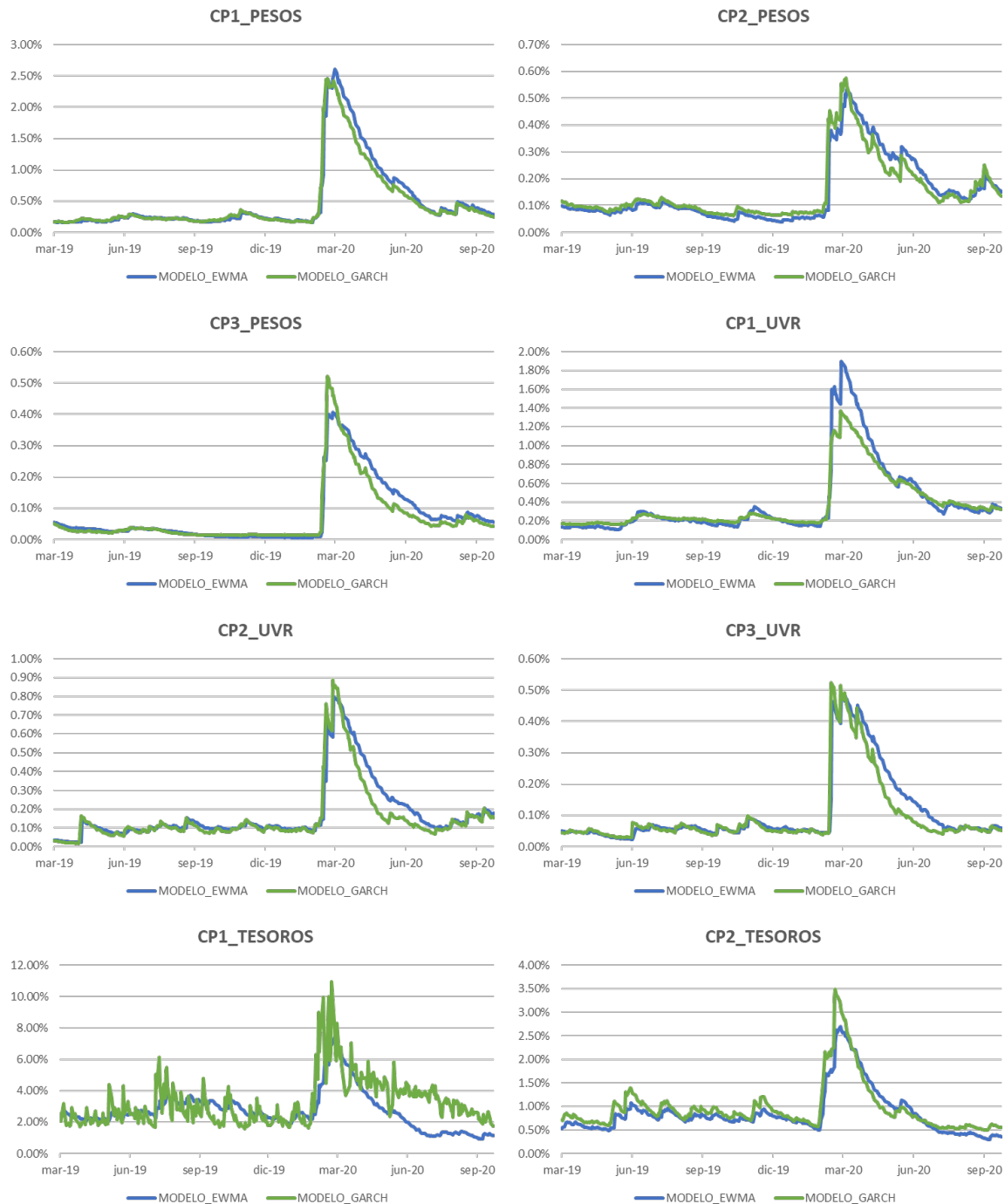
¹⁴ En todo caso, el subnumeral 1.4.1 del Anexo 3 del Capítulo XVIII de la Circular Básica Contable y Financiera de la SFC, establece que la volatilidad diaria estresada que se debe utilizar para calcular el factor de crédito en las operaciones derivadas debe ser calculada por los proveedores de precios para valoración según su propia metodología. Sin embargo, solo cuando el proveedor de precios para valoración no le suministre a la entidad la volatilidad diaria estresada del subyacente, esta corresponderá a aquella publicada mensualmente por la SFC en la Matriz para el Reporte Oficial de Riesgos de Mercado (VeR informativo) disponible en la página web de la SFC.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

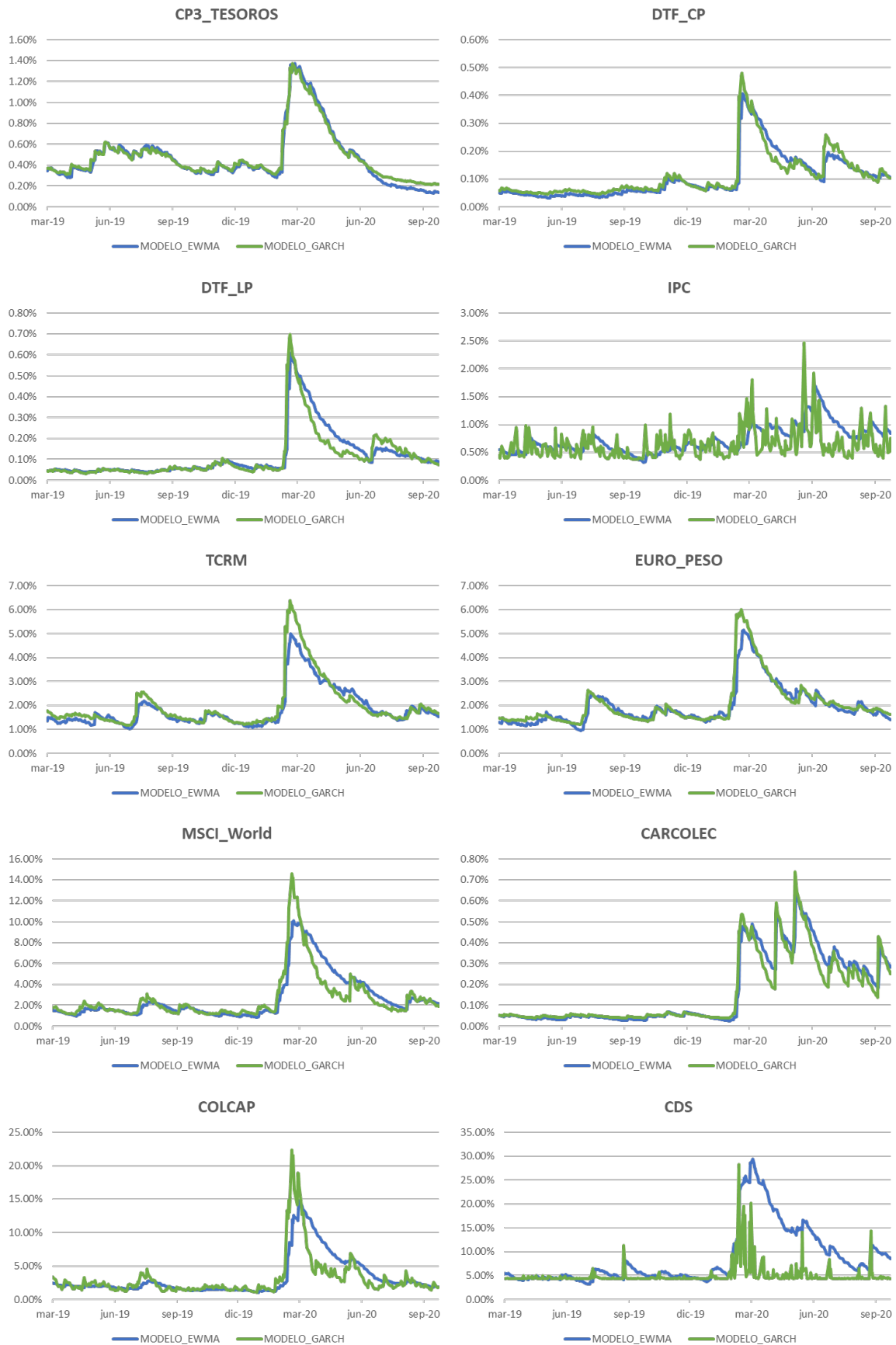
10. Anexos

Anexo 1

Resultados de las estimaciones de los modelos EWMA y GARCH para las variables del **anexo 2 del capítulo XXI de la CBCF** de la SFC para el periodo entre el 30 de octubre de 2018 hasta el 20 de octubre de 2020.



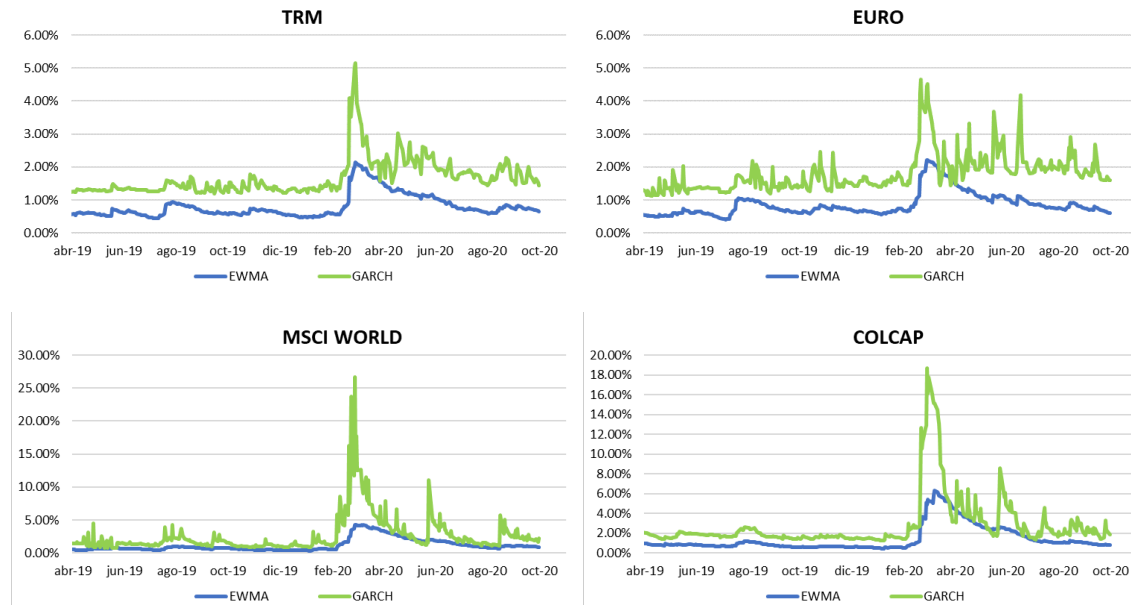
SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA



SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

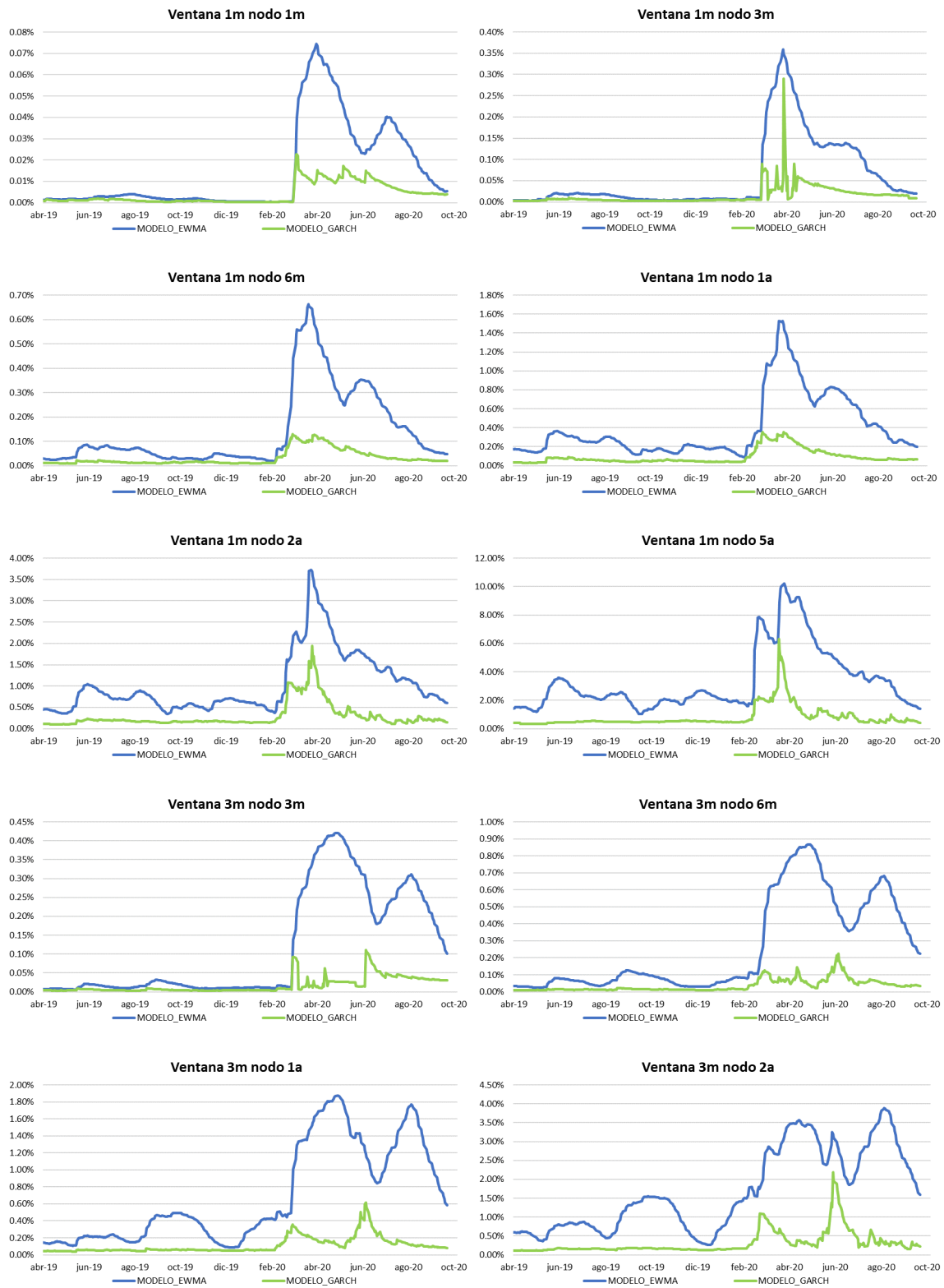
Anexo 2

Resultados de las estimaciones de los modelos EWMA y GARCH para las variables del **anexo 3 del capítulo XVIII de la CBCF** de la SFC para el periodo entre el 30 de octubre de 2018 hasta el 20 de octubre de 2020.

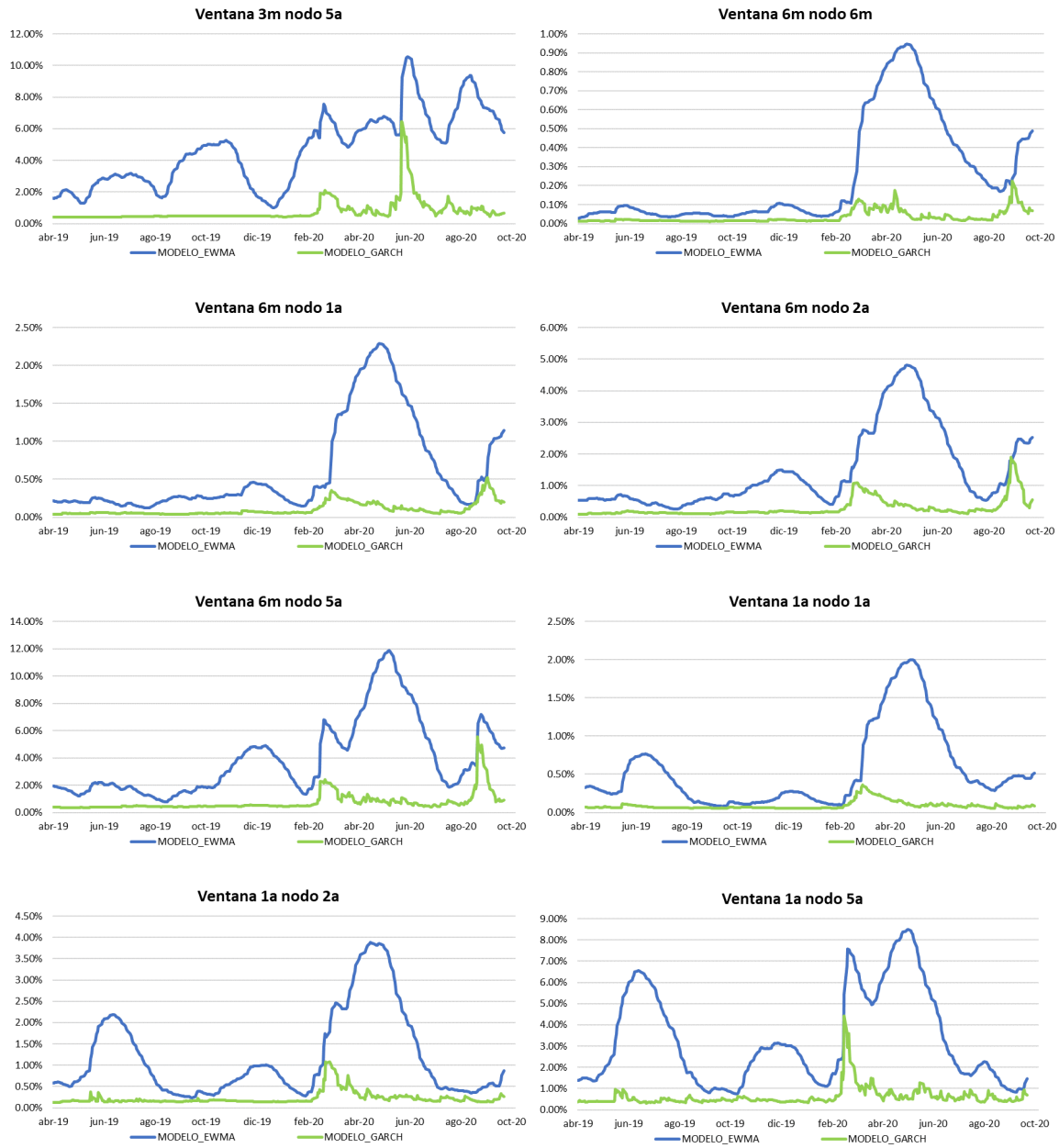


SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

Factor de riesgo IBR



SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA



11. Referencias

- Bessis, J. (2015). Volatility . En J. Bessis, *Risk Management in Banking* (págs. 169-178).
- BIS, B. C. (2011). Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book. *Bank for International Settlements Communications*.
- BIS, C. d. (Noviembre de 2005). Enmienda al Acuerdo de Capital para incorporar riesgos de mercado. Basilea, Suiza.
- BIS, C. d. (Diciembre de 2010). Basilea III: Marco regulador global para reforzar los bancos y sistemas bancarios. Basilea, Suiza.
- BIS, C. d. (Enero de 2016). Requerimientos mínimos de capital por riesgo de mercado . Basilea, Suiza.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 307–327.
- Bollerslev, T., Engle, R., & Wooldridge, J. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116-131.
- Botha, M., Vuuren, G. v., & Styger, P. (2001). The Effect of Dynamic Exponential Decay Factor on Volatility and VaR. *Journal of Applied Sciences*, 24.32.
- Cappiello, L., Engle, R., & Sheppard, K. (2006). Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns. *Journal of Financial Econometrics*, 4(4), 537-572.
- Carroll, R., & Kearney, C. (2009). GARCH modelling of stock market volatility. *Stock market volatility*, 71-90.
- Catania, L., & Bernardi, M. (2015). The Model Confidence Set package for R. *CEIS Tor Vergata Research Paper Series*, 13(11).
- Chou, R., Wu, C.-C., & Liu, N. (2009). Forecasting time-varying covariance with a range-based dynamic conditional correlation model. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 33(4), 327-345.
- Ding, J., & Meade, N. (2010). Forecasting accuracy of stochastic volatility, GARCH and EWMA models under different volatility scenarios. *Applied Financial Economics*, 771-783.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 987-1008.
- Engle, R. F., & Patton, A. J. (2001). What good is a volatility model? *Quantitative Finance*, 237 - 245.
- Engle, R., & Sheppard, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. *NATIONAL BUREAU OF ECONOMIC RESEARCH*, 1-44.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

- Eric Ghysels, A. H. (1996). *Stochastic Volatility*. Handbook of Statistics Vol 14.
- Franses, P. H., & Dijk, D. V. (1996). Forecasting stock market volatility using (non-linear) Garch models. *Journal of forecasting*, 229-235.
- Hakmaoui, O. E., & Abdelati. (2019). GARCH Family Models vs EWMA: Which is the Best Model to Forecast Volatility of the Moroccan Stock Exchange Market? *Métodos Cuantitativos Para La Economía Y La Empresa*, 237-249.
- Hansen, P., Lunde, A., Nason, & J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79(2), 453-497.
- Hentschel, L. (1995). All in the family nesting symmetric and asymmetric garch models. *Journal of Financial Economics*, 1(39), 71-104.
- Hull, J. C. (2015). Estimating volatilities and correlations. En J. C. Hull, *Options, futures, and other derivatives* (págs. 520-542). Toronto: Pearson.
- Jacquier, P. &. (1994). *Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models*. Journal of Business & Economic Statistics.
- Kumar, S. (2006). Comparative performance of volatility forecasting models in Indian markets. *Decision*, 26-40.
- Lee, G., & Engle, R. (1999). A permanent and transitory component model of stock return volatility. In Cointegration Causality and Forecasting A Festschrift in Honor of Clive WJ Granger. *Oxford University Press*, 475-497.
- Miron, D., & Tudor, C. (2010). Asymmetric Conditional Volatility Models: Empirical Estimation and Comparison of Forecasting Accuracy. *Romanian Journal of Economic Forecasting*, 74 - 92.
- Morgan, J. (1996). Estimation and forecast . En J. Morgan, *RiskMetrics™—Technical Document* (págs. 75-100). New York: Reuters Ltd.
- Nelson, D. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. . *Econometrica*, 2(59), 347–70.
- Nilsson, C. (2017). Forecasting Swedish Stock Market Volatility and Value-at-Risk: A Comparison of EWMA and GARCH Models. *School of economics and management department of economics*, 1-46.
- On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. (1993). *Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.
- Sangjoon Kim, N. S. (1998). Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models. *The Reviewing of Economic Studies*, 361-393.
- Schwert, A., Pagan, R., & William, G. (1990). Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics*, 267-290.
- Sironi, A., & Resti, A. (2012). Volatility Estimation Models. En A. R. Andres Sironi, *Risk Management and Shareholders' Value in Banking: From Risk Measurement Models to Capital Allocation Policies* (págs. 163-183). John Wiley & Sons Ltd.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA

- Taylor, S. J. (1982). Financial returns modelled by the product of two stochastic processes, a study of daily sugar prices. *The International Library of Critical Writings in Economics*, 423-446.
- Yuen Meng Wong, R. A. (2014). Exchange Rate Responses to Macroeconomic Surprises: Evidence from the Asia-Pacific Markets. *World Finance Conference 2014*. Venice, Italy.
- Zhuanxin Ding, C. W. (Junio de 1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83-106.